

2023年

東大数学

文系第4問 ①

Point

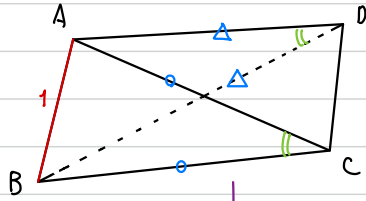
立体図形では、

Q 対称性の利用

Q 高さや球の中心など

特別な点を含むおぼろげ切斷する

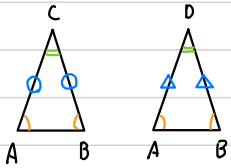
の2つを利用する。



計算を始め前に考察すること (下準備)

考察① 合同の証明

$\triangle ABC \sim \triangle ABD$ について、



• $\cos \angle ACB = \cos \angle ADB$ より

$\angle ACB = \angle ADB \dots (A)$

• どちらも等辺三角形なので、底角が等しい

$\begin{cases} \angle CAB = \angle CBA \\ \angle DAB = \angle DBA \end{cases} \dots (B)$

• (A) (B) と、三角形の内角の和は 180° であることから

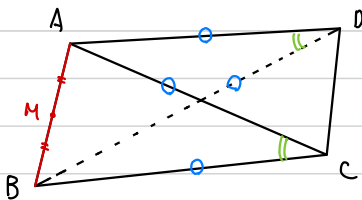
$\angle CAB = \angle CBA = \angle DAB = \angle DBA \dots (C)$

• AB が共通で、(C) が成り立つので

1辺と、その両端の角が等しいので

$\triangle ABC \cong \triangle ABD$

よって、 $AC = BC = AD = BD$



← 合同にならねど、次に対称性を利用して考察を進める。

なんか合同にはりそうだなと気づいた証明。(合同だと、対称にもなるし、うまい)

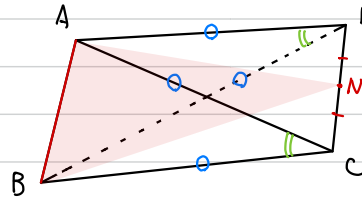
実際の解答ではここまで丁寧には書かない

考察② 球の中心の場所の特定

AB, CD の中点を M, N とする。

• $\triangle ABN$ で切斷した場合、

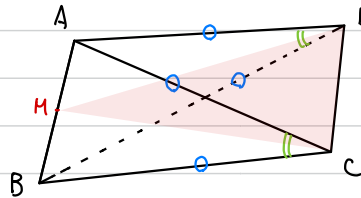
2つの合同な四面体に分かれる (前と奥)



よって、球の中心は $\triangle ABN$ を含む平面にある

• 同様に $\triangle CDM$ で切斷した場合も

2つの合同な四面体に分かれる (上と下)



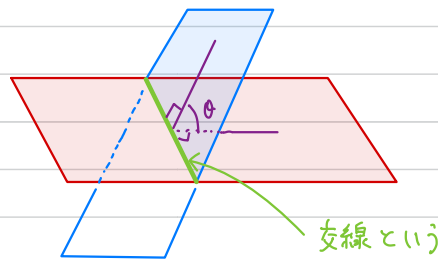
よって、球の中心は $\triangle CDM$ を含む平面にある

以上より、

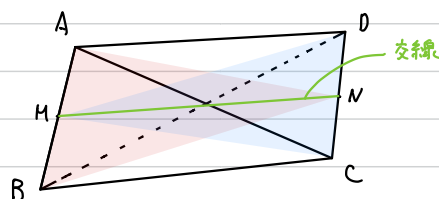
球の中心は $\triangle ABN$ 上にあり、かつ $\triangle CDM$ 上にあるため、

球の中心は $\triangle ABN$ と $\triangle CDM$ の交線上にある。

③ 2平面の共有点は直線となる



$\triangle ABN$ と $\triangle CDM$ の交線は、直線 MN である



よって、球の中心は線分 MN 上にある。

球の中心の場所がかなり特定された

↑ 対称性を見つけて、切斷して、球の中心を特定する。

2023年

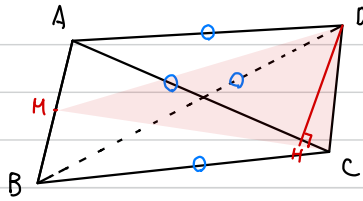
東大数学

考察③ 高さの特定

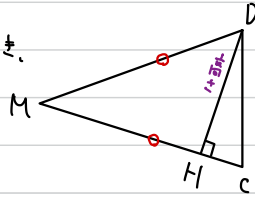
一般に、
二等辺三角形において、
頂角Xの二等分線は、
底辺と中点で直交する



$\triangle ABC \cong \triangle ABD$ も
二等辺三角形なので、
 $CM \perp AB$, $DM \perp AB$
よって $AB \perp$ 平面 CDM
である。

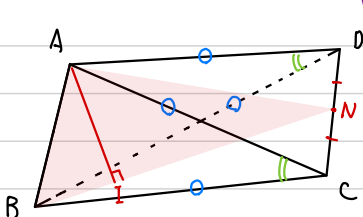


以上から、 $\triangle ABC$ を底面とみなしたとき、
D から下ろした垂線の足 H は
直線 CM 上にある。
これにより $\triangle ABC$ に対する高さが特定された。



なお同様に、

$\triangle ACD \cong \triangle BCD$ は
二等辺三角形なので、
 $AN \perp CD$, $BN \perp CD$
よって $CD \perp$ 平面 ABN と示す。



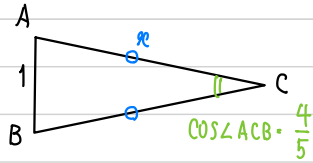
$\triangle BCD$ を底面とみなしたとき、の高さが
A から下ろした垂線の足 I であり特定できるが、
(1) で $\triangle ABC$ の面積を求めるとき、こちらは用いる優先順位は低い。

長くなりましたが、
立体図形の問題では、以上のようなことを調べるように
なると良いです。(頻出の解法です。)

右上から、思考のフローチャートに従って
解法を解説します。

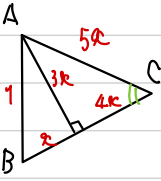
文系第4問 ②

(1) $AC = x$ とおく。
 $\triangle ABC$ に余弦定理を用い
 $y^2 = x^2 + x^2 - 2 \times x \times x \times \frac{4}{5}$
 $\therefore x^2 = \frac{5}{2}$ $x = \sqrt{\frac{5}{2}}$



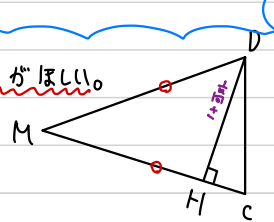
別解

$\cos \angle ACB = \frac{4}{5}$ から、
3:4:5の直角三角形を利用
しても、求められる。
 $x^2 + (3x)^2 = 1^2$ より $x = \frac{1}{\sqrt{10}}$
 $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 5x \times 3x = \frac{1}{2} \times 5 \times 3 \times \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{3}{4}$

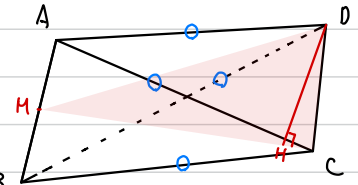
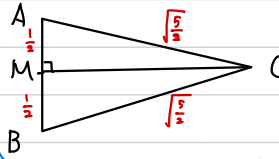


$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より
 $\sin \angle ACB = \sqrt{1 - (\frac{4}{5})^2} = \frac{3}{5}$ なのて。
 $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times x \times x \times \frac{3}{5}$
 $= \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{3}{5}$
 $= \frac{3}{4}$ //

(2)
体積を求めるときには高さ DH がほしい。
右図の $\triangle DMC$ において
既知の長さはない。 $\Rightarrow$ 1つずつ求める。



$DM = CM$ の長さは
 $\triangle ABC$ に注目すれば
求められる。

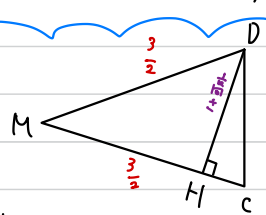


$\triangle ABC$ において、
三平方の定理より
 $CM = \sqrt{(\frac{\sqrt{5}}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{3}{2}$

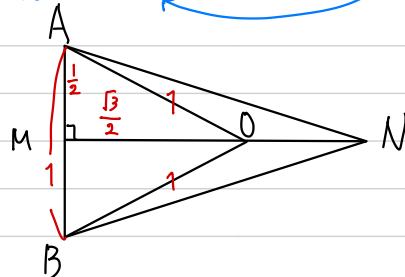
(別解) $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times AB \times CM$ より
 $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} \times 1 \times CM$
 $CM = \frac{3}{2}$ でも可

$CM = DM = \frac{3}{2}$ とわかり、
まだ DH を特定するのに
情報が足りない。

よって、未使用の条件である「球に内接する」
を利用する。 $\Rightarrow$ 球の中心は考察③から、MN上にある。



$\triangle ABN$ において、MNを含む三角形



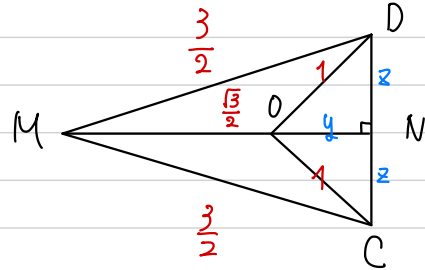
OA と OB は球の半径
なので、 $OA = OB = 1$
 $\triangle OAB$ は正三角形で、
 $OA : AM : MO = 2 : 1 : \sqrt{3}$
なので、 $OM = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2023年

東大数学

文系第4問③

△CDMにおいて. これも、MNを含む



OC, OD は球の半径なので: $OC = OD = 1$.

$ON = 4$, $DN = CN = z$ とおく

△OND と △MND で三平方の定理をたて

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 1 \\ (4 + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + z^2 = (\frac{3}{2})^2 \end{cases}$$

y と z の連立方程式を解いて.

$$y = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$z = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$$

~~~~~ CD がわかった!!

さて、△CDM の 3 辺が判明!!  
あとは、DH を求めただけ。

余弦定理より

$$\cos \angle CMD = \frac{(\frac{3}{2})^2 + (\frac{3}{2})^2 - (\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}})^2}{2 \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2}} = \dots = \frac{5}{27}$$

$$\sin \angle CMD = \sqrt{1 - (\frac{5}{27})^2} = \dots = \frac{8\sqrt{11}}{27}$$

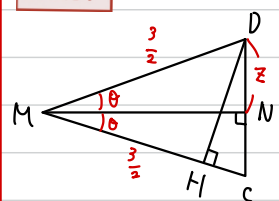
$$\therefore DH = DM \times \sin \angle CMD$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{8\sqrt{11}}{27} = \dots = \frac{4}{9}\sqrt{11}$$

~~~~~ さて、高さがわかった。

$$\begin{aligned} (\text{四面体 ABCD の体積}) &= \frac{1}{3} \times \triangle ABC \times DH \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{9}\sqrt{11} = \frac{\sqrt{11}}{9} // \end{aligned}$$

別解



MN が角の二等分線なので、その利用にて.

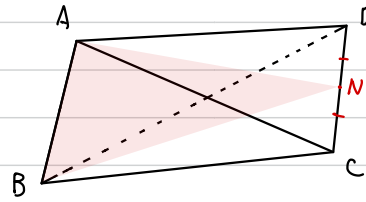
$$\sin \theta = \frac{z}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{3}} \quad \cos \theta = \sqrt{1 - (\frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{3}})^2} = \frac{4}{3\sqrt{3}}$$

$$\sin \angle CMD = \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \quad \leftarrow \text{2倍角}$$

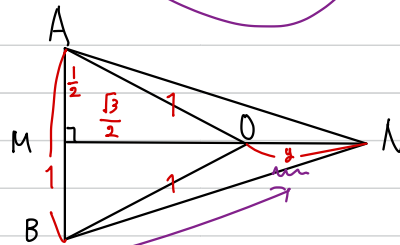
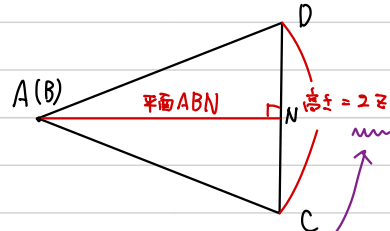
$$= 2 \times \frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{3}} \times \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{11}}{27}$$

と求めた。

別解



↓ 真横から見ると



考察③より.

$CD \perp \text{平面} ABN$ なのだから

$$(\text{体積}) = \frac{1}{3} \times \triangle ABN \times CD$$

と求められる。

△ABC を底面とみない

$$\begin{aligned} \triangle ABN &= \frac{1}{2} \times 1 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

よって.

$$\begin{aligned} (\text{四面体 ABCD の体積}) &= \frac{1}{3} \times \triangle ABN \times CD \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{11}}{9} // \end{aligned}$$

2023年

東大数学

別解 全然ちがう方針でOK. ベクトルの利用.

考察①~③は利用することにします.

Oを球の中心とする.

基底のベクトルを

$$\vec{OA} = \vec{a} \text{ と } \vec{OB} = \vec{b} \text{ と } \vec{OC} = \vec{c}$$

に設定する.

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1 \text{ (半径)}$$

$$|\vec{AB}| = 1 \text{ より } |\vec{AB}|^2 = 1$$

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = 1 \text{ より } |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = 1$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$$

$$|\vec{AC}| = |\vec{BC}| \text{ より } |\vec{AC}|^2 = |\vec{BC}|^2$$

$$|\vec{c} - \vec{a}|^2 = |\vec{c} - \vec{b}|^2$$

$$|\vec{c}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{a}|^2 = |\vec{c}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{b}|^2$$

$$1 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 1 = 1 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 1$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$\cos \angle CAB = \frac{4}{5} \text{ より}$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = |\vec{CA}| |\vec{CB}| \cos \angle CAB \quad |\vec{CA}| \cdot |\vec{CB}|$$

$$(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = |\vec{a} - \vec{c}|^2 \times \frac{4}{5}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = \frac{4}{5} (|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2)$$

$$\frac{1}{2} - 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 1 = \frac{4}{5} (1 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 1)$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = -\frac{1}{4}$$

以上で 基底のベクトルの大きさと内積 が全てわかった!!

あとは単次元計算のみ

(まとめ)

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = -\frac{1}{4}$$

(1)

$|\vec{CA}|$ を求めるので、2乗する。

大きさは2乗

$$|\vec{CA}|^2 = |\vec{a} - \vec{c}|^2$$

$$= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2$$

$$= 1 + 2 \times \frac{1}{4} + 1$$

$$= \frac{5}{2}$$

$$\therefore |\vec{CA}| = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\text{仮定より } |\vec{CB}| = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB}$$

$$= (\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c})$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1$$

$$= 2$$

面積公式に
代入するだけの
仕掛け

文系第4問 ④

$$\begin{aligned} \Delta ABC &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{CA}|^2 |\vec{CB}|^2 - (\vec{CA} \cdot \vec{CB})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2} \times \frac{5}{2} - 2^2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(2) Nは、平面OAB上にあり、

ΔABN は等辺三角形なので、

$$\vec{ON} = n(\vec{a} + \vec{b}) \text{ と表せ}$$

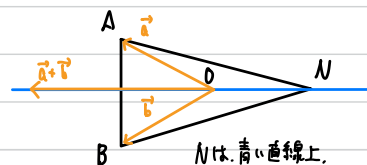
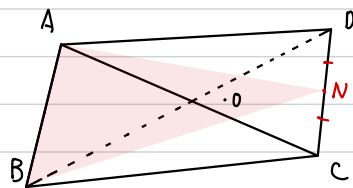
nは実数

$$\vec{CD} = 2\vec{CN} \text{ より } \vec{d} - \vec{c} = 2(\vec{n} - \vec{c})$$

$$\vec{d} = \vec{c} + 2\vec{n} - 2\vec{c}$$

$$= 2\vec{n} - \vec{c}$$

$$\therefore \vec{d} = 2n\vec{a} + 2n\vec{b} - \vec{c}$$



Nは、青い直線上.

$$|\vec{d}| = 1 \text{ より } |2n\vec{a} + 2n\vec{b} - \vec{c}| = 1 \quad 2 \text{ 乗}$$

$$4n^2|\vec{a}|^2 + 4n^2|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 8n^2\vec{a} \cdot \vec{b} - 4n\vec{a} \cdot \vec{c} - 4n\vec{b} \cdot \vec{c} = 1$$

$$4n^2 + 4n^2 + 1 + 4n^2 + n + n = 1$$

$$12n^2 + 2n = 0 \quad \therefore n = -\frac{1}{6} \quad n \text{ は特定}$$

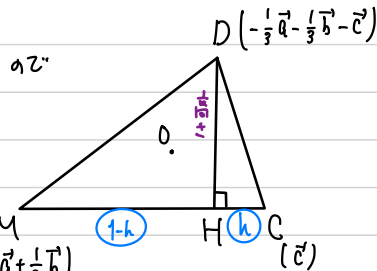
$$\begin{cases} \vec{n} = -\frac{1}{6}(\vec{a} + \vec{b}) \\ \vec{d} = -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c} \end{cases}$$

N ∈ DE 特定

ΔCDM において、HはCM上にあるので

$$\vec{OH} = h\vec{OM} + (1-h)\vec{OC} \quad h: 1-h \text{ の分点}$$

$$= h\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) + (1-h)\vec{c}$$



$$\vec{DH} = \vec{h} - \vec{d}$$

$$= \left(\frac{1}{2}h + \frac{1}{2}\right)(\vec{a} + \vec{b}) + (2-h)\vec{c}$$

$$\vec{CM} = \vec{m} - \vec{c}$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{c}$$

垂直条件の
仕掛け

$$\vec{DH} \perp \vec{CM} \text{ なるので } \vec{DH} \cdot \vec{CM} = 0 \text{ より}$$

$$\left(\left(\frac{1}{2}h + \frac{1}{2}\right)(\vec{a} + \vec{b}) + (2-h)\vec{c}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{c}\right) = 0$$

$$\text{展開して } h \text{ を求めると } h = \frac{22}{27}$$

$$\text{代入して } \vec{DH} = \frac{20}{27}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{32}{27}\vec{c}$$

$$\begin{aligned} |\vec{DH}|^2 &= \left(\frac{20}{27}\right)^2 |\vec{a} + \vec{b}|^2 + 2 \times \frac{20}{27} \times \frac{32}{27} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} + \left(\frac{32}{27}\right)^2 |\vec{c}|^2 \\ &= \dots = \frac{176}{81} \end{aligned}$$

$$\therefore |\vec{DH}| = \frac{4\sqrt{11}}{9}$$

$$(\text{体積}) = \frac{1}{3} \Delta ABC \times DH$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4\sqrt{11}}{9} = \frac{\sqrt{11}}{9}$$

ベクトルを使うと
計算量は増えるが、
機械的に処理できる。